МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

ЖУРНАЛ МОСКОВСКОГО НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА

№ 6 1928 г.

МЕТОД ИСЧЕРПЫВАНИЯ.

Проф. Д. Д. Мордухай-Болтовской (Ростов-Дон).

§ 1. Античная мысль и бесконечность.

Античная мысль не знает в нашем смысле математической бесконечности. Бесконечность как актуальная [1]), т.-е. бесконечность множеств и трансфинитных чисел, так и потенциальная бесконечность предела вышли из средневекового схоластического мышления. Бесконечность медленно отвоевывала себе права. Долго в схоластике держится доказательство, которое можно назвать reductio ad infinitum [2]), которое существование об'екта, небытие которого следует доказать, ставит в зависимость от существования недопустимой актуальной бесконечности. Актуальная бесконечность сперва бога, затем вселенной и, наконец, числа.

Для античной мысли, носящей определенно *статический* [3]) характер, совершенством может обладать только вполне ограниченная форма; снятие границ ведет к неопределенности, к несовершенству. Это, конечно, точка зрения, как-раз противоположная спинозовской и канторовской, для которых конечное получается из бесконечного путем наложения границ на более совершенное. Более того, бесконечность, которая всегда приравнивается безграничному, теряет свое право на существование в силу вскрываемых в ней противоречий.

В признании Аристотелем *потенциальной бесконечности* можно было бы видеть зародыш идеи предела.

Представляет ли эта бесконечность то, что вещь стремится достигнуть, но не достигает?

Но такая формулировка совсем не в античном духе, античная мысль не знает движущейся переменной величины. Да, кроме того, идея предела характеризуется не только одним стремлением к ней, но и сколь угодно близким приближением, поэтому бесконечность и не может быть признана в собственном смысле пределом.

У Аристотеля актуально бесконечное — это снятие *всех* границ, потенциальное — это только возможность снятия всякой определенной границы, при этом вовсе не мыслится вся совокупность этих возможностей.

---

[1]) Аристотель о бесконечности—«Phys.». Cap. V. «De Generat. et Corrup». Cap. III.

[2]) Примеры reductio ad infinitum можно найти у Аристотеля и у схоластиков. Первым образцом такого доказательства является известное Зеноновское доказательство несуществования пустого пространства. См., например, Таннери—«Первые шаги греческой науки». Укажем также доказательства существования первой материи и первого двигателя у Аристотеля.- «Мех.», гл. XIV, стр., 16; «Phys.», VIII, стр. 49.

[3]) О статическом характере античной мысли см. *Шпенглер*—«Закат Европы», том I

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

№ 6 ЖУРНАЛ МОСКОВСКОГО НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА 1928 г.

МЕТОД ИСЧЕРПЫВАНИЯ.

Проф. Д. Д. Мордухай-Болтовской (Ростов-Дон).

§ 1. Античная мысль и бесконечность.

Античная мысль не знает в нашем смысле математической бесконечности. Бесконечность как актуальная [1]), т.-е. бесконечность множеств и трансфинитных чисел, так и потенциальная бесконечность предела вышли из средневекового схоластического мышления. Бесконечность медленно отвоевывала себе права. Долго в схоластике держится доказательство, которое можно назвать reductio ad infinitum [2]), которое существование об'екта, небытие которого следует доказать, ставит в зависимость от существования недопустимой актуальной бесконечности. Актуальная бесконечность сперва бога, затем вселенной и, наконец, числа.

Для античной мысли, носящей определенно *статический* [3]) характер, совершенством может обладать только вполне ограниченная форма; снятие границ ведет к неопределенности, к несовершенству. Это, конечно, точка зрения, как-раз противоположная спинозовской и канторовской, для которых конечное получается из бесконечного путем наложения границ на более совершенное. Более того, бесконечность, которая всегда приравнивается безграничному, теряет свое право на существование в силу вскрываемых в ней противоречий.

В признании Аристотелем *потенциальной бесконечности* можно было бы видеть зародыш идеи предела.

Представляет ли эта бесконечность то, что вещь стремится достигнуть, но не достигает?

Но такая формулировка совсем не в античном духе, античная мысль не знает движущейся переменной величины. Да, кроме того, идея предела характеризуется не только одним стремлением к ней, но и сколь угодно близким приближением, поэтому бесконечность и не может быть признана в собственном смысле пределом.

У Аристотеля актуально бесконечное — это снятие *всех* границ, потенциальное — это только возможность снятия всякой определенной границы, при этом вовсе не мыслится вся совокупность этих возможностей.

---

[1]) Аристотель о бесконечности—«Phys.». Cap. V. «De Generat. et Corrup». Cap. III.

[2]) Примеры reductio ad infinitum можно найти у Аристотеля и у схоластиков.

Первым образцом такого доказательства является известное Зеноновское доказательство несуществования пустого пространства. См., например, Таннери—«Первые шаги греческой науки». Укажем также доказательства существования первой материи и первого двигателя у Аристотеля.— «Мех.», гл. XIV, стр., 16; «Phys.», VIII, стр. 49.

[3]) О статическом характере античной мысли см. *Шпенглер*—«Закат Европы», том I

Античный математик никогда не берет бесконечный ряд. Весь ряд у него *мыслится* конечным.

Он *только* говорит, что в ряду A_1, A_2, A_3 . . . он может выбрать *такое* A_n, что разность $A - A_n$ окажется меньше наперед заданной величины: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ . . . . . . Он 1) вовсе не мыслит переменного X, проходящего через значения A_1, A_2, A_3 . . и стремящегося к A; 2) он вовсе не мыслит всей бесконечной совокупности A_1, A_2, A_3 . . . , а только конечное число операций, достигающих цели. На первый взгляд кажется, что внесение понятия предела в даламберовском [1]) смысле ничего не дает, что все доказательства, выдвигаемые методом пределов, при более строгой обработке в конечном итоге сводятся к античной методе.

Если признать, что идея предела в строгой обработке должна выпасть, являясь логически не действующей, то и тогда за ней следует признать большое значение уже в *эвристическом* смысле, признать, что эта общая идея явилась основной при построении, может быть, и недостаточно обоснованных методов, сменивших античные, носившие более случайный характер.

Но не трудно видеть и то, что такое возвращение к античной методе при требовании логической стройности не достигает цели.

Понятие предела содержит больше, чем то, что определяется условием, что $A - X$ может быть сделано менее всякой заданной величины, это большее выражается обычным в настоящее время добавлением: «и в дальнейшем остается меньше этой величины» [2]).

Это прибавление дает возможность выделить случай, когда ряд A_1 A_2, A_3 . . . имеет только одну точку сгущения среди случаев, когда этих точек вообще много и даже бесконечно много. Но при этом необходимо то, что совершенно чуждо и Евклиду и Архимеду: необходима мысль о *всем* бесконечном множестве A_1, A_2, A_3 . . . Собственно говоря, замена актуальной бесконечности метода неделимых потенциальной бесконечностью теории пределов вовсе не уничтожает первой, она ее, так сказать, загоняет в подполье, она существует сперва скрытно, а потом выступает явно. А именно—во всяком пределе мыслится весь процесс приближения к пределу в его целом. Процесс этот во времени всегда незакончен, а в мысли он является, как нечто во всей своей полноте, и определяет так называемый фундаментальный ряд Кантора [3]). Там, где множество содержит бесконечное число точек сгущения, например, в случае континуума, метод древних всегда будет дефектным. Постулирование существования четвертой пропорциональной X в пропорции [4]):

$$A : X = a_1 : a_2$$

[1]) Определение Даламбера предела см. «Encyclopedie methodique des arts et des metiers» (Diderot), статья Limite, также Melanges, § XIV. Об истории пределов смотри мою статью в «Известиях северо-кавказского университета»: «Генезис и история пределов».

О Даламбере см. *Bobynin.* «Elemente der Geometrie» в *Cantor.* «Vorlesungen ub. Ges. der Math.», B. IV, Ab. XXII, S. 355, также B. III, также статья *Бобынина* – «Элементарная геометрия и ее деятели во второй половине XVIII века», «Журнал мин. нар. просв.», сер. XII, 1907, № 1, отдел 2.

[2]) См., напр., *Поссе.* «Курс дифференциального и интегрального исчисления», § 5. У *Коши* («Уроки дифф. и инт. исчисления», пер. Буняковского, СПБ. 1831) этот пункт не выявлен.

[3]) *Кантор.* Учение о множествах. Новые идеи в математике. Его работа в «Math. Ann.», 21, 23, и «Acta Math.», t. II.

[4]) У Клавия впервые выступает этот постулат. См. «Euclidis elementorum libri XVI». Auctore Christophoro Clavis. Francfurti 1654. См. также *Энрикес.* «Вопросы элементарной математики». СПБ. 1915, стр. 220, статья *Вайлати* «Учение о пропорциях». «Мат. обр.», 1916 г., № 7–8.