Мордухай-Болтовской Д.Д.

Принцип непрерывности и его методическое значение. (Рукопись).

ПРИНЦИП НЕПРЕРЫВНОСТИ И ЕГО МЕТОДИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ

§ I. Нельзя отрицать методического значения общего принципа теории пределов, состоящего в том, что свойство переменных $x, y, z \ldots$, имеющее место при всем их изменении, остается и в пределе.

Этот принцип, конечно, в значительной мере в ущерб строгости, сокращает изложение теории пределов, так как все основные теоремы теории пределов непосредственно выводятся из него.

Если всегда $x + y = z$, то и $\lim x + \lim y = \lim z$, так что

$$\lim x + \lim y = \lim (x+y) \qquad /I/$$

т.е. предел суммы равен сумме пределов.

Если всегда $xy = z$, то и $\lim x \cdot \lim y = \lim z$, так что

$$\lim xy = \lim x . \lim y \qquad /2/$$

так что предел произведения равен произведению пределов. Под этот общий принцип подводятся и две основные леммы элементарной теории пределов, символически выражаемые так:

$$X = y \rightarrow \lim x = \lim y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{n} \rightarrow \frac{\lim x}{\lim y} = \frac{m}{n}$$

Но обычно элементарная теория пределов в применении к измерению круга без доказательств пользуется теоремой /2/, а

именно, при выводе площади круга.

Ведь основанием для этой формулы может быть только общий принцип теории пределов, который в настоящем случае берется, как скрытая аксиома.

§ 2. Этот принцип можно брать и не в арифметизированной форме, относя его к свойствам, не выражаемым в числах, например к форме или к взаимному расположению, например: к касанию, утверждая, что например замкнутость, касание и т.п. остаются и в пределе или при вырождении.

В иных случаях применение этого принципа является уже просто неизбежным, например при выводе теоремы ГЮЛЬДЕНА о поверхностях и объемах тел вращения. В методическом отношении этот вывод представляет большой интерес.

Теорема устанавливается для треугольника, многоугольника и затем делается переход к кривой, как к пределу многоугольника, причем постулируется, что предельное положение центра тяжести многоугольника представляет центр тяжести кривой.

§3. На первый взгляд этот принцип, формулированный в приведенной общей форме, не находит себе возражений и можно примириться с тем, что нельзя