ББК 22.25
В75
УДК 539.3

Ворович И. И. **Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек.**— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.— 376 с.— ISBN 5-02-014003-1.

Дан полный математический анализ краевых задач нелинейной теории оболочек. Для всех физически осмысленных постановок доказаны теоремы разрешимости и корректности в условиях глубокой нелинейности. Приведены условия единственности решений и условия неединственности. Получили обоснование в этом круге нелинейных задач методы приближенного решения: Бубнова — Галеркина, Ритца, Ньютона — Канторовича и др. Большое внимание уделено нелинейной устойчивости, в которой различаются две проблемы: оценка числа решений краевой задачи и выбор наиболее реального. Подробно проанализированы возможности принципа линеаризации Эйлера, дано строгое математическое обоснование существования нижних критических чисел, развит статистический подход. Основу рассмотрений составили топологические и вариационные соображения.

Для специалистов по теории оболочек и математиков, интересующихся приложениями, а также студентов и аспирантов соответстующих специальностей.

Ил. 46. Библиогр. 504 назв.

Рецензент
доктор физико-математических наук *Н. Ф. Морозов*

В $\frac{1603040000-141}{053(02)-89}$ 60-89

ISBN 5-02-014003-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Истоки нелинейной теории пологих оболочек восходят к трудам И. Г. Бубнова и Т. фон Кармана. Современное ее состояние в значительной степени обязано идеям Л. Доннела, К. Маргерра, Х. М. Муштари, В. З. Власова, В. В. Новожилова, Вей Цанг Чена и других исследователей. Бурное развитие этого раздела математической теории упругости в первую очередь связано с широкими приложениями, поскольку выяснилось, что проблема устойчивости тонкостенных конструкций в полной мере может решаться лишь на базе нелинейных краевых задач.

Вместе с этим нелинейная теория оболочек может рассматриваться как широкое развитие классической задачи Плато, и в этом ее большое естественнонаучное значение. Действительно, задача Плато относится к поверхностям с вполне определенным законом деформирования: плотность потенциальной энергии деформации пропорциональна изменению площади элемента. Между тем в теории оболочек рассматриваются поверхности, у которых плотность потенциальной энергии деформации есть некоторая скалярная функция тензора деформации, что в значительной степени осложняет проблему, придавая ей вместе с этим и больший естественнонаучный интерес, и большое практическое значение. Имеется громадное количество работ, в которых исследуются конкретные задачи нелинейной теории оболочек. Однако нет ни одной задачи этой теории, когда бы ее решение можно было получить в сколь-нибудь замкнутой форме. Поэтому здесь используется широкий комплекс приближенных методов с применением ЭВМ. Это делает особо актуальным строгое математическое исследование рассматриваемого класса нелинейных задач. Отметим также, что практически интересные механические явления не позволяют для своего анализа использовать почти линейные постановки, они связаны с большими «глубокими» нелинейностями.

В связи с этим построение математической теории нелинейных задач требует привлечения широкой гаммы математических средств, и это в большой мере определило структуру монографии.

Глава I посвящена постановке краевых задач нелинейной теории пологих оболочек. В ее ходе детально проанализировано само понятие пологости, которое имеет сложный физико-геометрический характер. Оно отрабатывалось в трудах К. Маргерра, Х. М. Муштари, В. З. Власова, К. З. Галимова, В. В. Новожилова и др. Приведен единый критерий «пологости» оболочки. Основные краевые задачи сформулированы в произвольных неортогональных координатах как в перемещениях, так и с функцией усилий.

В гл. II монографии приведены некоторые сведения о функциональных классах С. Л. Соболева, ряд теорем функционального анализа, которые составляют основу для последующих рассмотрений. Здесь же дается разъяснение такого важного топологического инварианта, как степень отображения, и приводятся его основные свойства, доказывается одна из лемм о коэрцитивности, широко используемая в дальнейших выводах. В этой же главе в § 11, 12 также построены основные функциональные пространства $H_{t\varkappa}$, H_t, $H_\varkappa$, в которых дается обобщенная постановка краевых задач. Поскольку мы имеем дело с существенно нелинейными задачами, то переход к обобщенным решениям можно совершить разнообразными приемами. Автор избрал обобщенные решения, непосредственно вытекающие из вариационных принципов Лагранжа и Алумяэ. При этом проясняется и механический смысл обобщенных решений. В § 13—16 гл. III развивается топологический метод доказательства разрешимости основных краевых задач в перемещениях.

Он основывается на вычислении вращения некоторого вполне непрерывного векторного поля на сферах большого радиуса в гильбертовом пространстве H, для чего используется идея гомотопности, опирающаяся на априорную оценку решения. Последняя же получена здесь при весьма широких смешанных условиях закрепления оболочки, при действии как поперечных, так и продольных нагрузок.

Поскольку получение априорной оценки есть один из существенных моментов доказательства, то отметим, что в основе ее вывода лежит физическая идея разбиения сферы энергетического пространства H на две части, одна из которых не содержит слабого замыкания нуля. Для этой части сферы доказательство базируется на анализе энергии растяжения оболочки, для остальной части сферы соответствующие неравенства достигаются за счет оценки энергии изгиба. Вычисление вращения векторного поля дает не только теорему разрешимости, но и основу для анализа числа решений задачи. В частности, в некоторых случаях на этом пути удается доказать неединственность решения. В § 17—19 гл. IV аналогичные рассмотрения проведены для случая краевой задачи с функцией усилий. При этом также вычислено вращение соответствующего векторного поля и доказаны теоремы разрешимости.

В § 20 подробно изучаются дифференциальные свойства обобщенных решений, в частности, устанавливаются условия существования классических решений. Эти результаты впоследствии используются для оценки быстроты сходимости некоторых приближенных методов.

В гл. V для исследования краевых задач нелинейной теории пологих оболочек использован вариационный подход. Хотя основной результат здесь снова — теоремы разрешимости, полученные решения качественно отличаются от решений § 16, 19, поскольку они характеризуют экстремальные состояния системы.

Характерная особенность рассуждений, использованных в гл. III—V, заключается в том, что примененные здесь методы дают нелокальные результаты. Иными словами, краевые задачи нелинейной теории оболочек исследованы без каких бы то ни было предположений о малости нелинейных членов, параметров нагрузки, кривизны и т. д.

В гл. VI, VII подробно анализируется большая гамма методов, широко используемых в настоящее время для численного решения краевых задач нелинейной теории пологих оболочек. В первую очередь изучены локальные методы (малого параметра, последовательных приближений, Ньютона — Канторовича), установлены пределы их применимости, приведены рекомендации по усилению эффективности. В гл. VII дано полное обоснование методов Бубнова — Галеркина и Ритца в формах, которые наиболее широко используются: П. Ф. Папковича, Х. М. Муштари, В. З. Власова. При этом анализе также не применяются какие-либо соображения локальности, базирующиеся на предположениях о малости определяющих факторов.

Отметим важную в этом плане особенность рассматриваемых задач: обоснование приближенных методов проведено в условиях возможной неединственности, что придает результатам достаточную общность. Схема обоснования прямых методов решения краевых задач нелинейной теории пологих оболочек, изложенная в гл. VII, приложима и к анализу методов конечных разностей, конечных элементов. При этом для указанных методов может быть сформулирован и некоторый общий принцип: погрешность приближенного отыскания решения из краевой задачи, как правило, асимптотически эквивалентна погрешности прямого приближения отыскиваемого решения используемым аппаратом. Исключения здесь могут составлять лишь решения, лежащие на «складках», т. е. в пограничных областях определяющих параметров, разделяющих области изменения числа решения нелинейной системы.

Вопросы устойчивости оболочек «в большом» рассмотрены в гл. VIII—X. Автор исходит из того, что в рассматриваемой механической задаче решение проблемы устойчивости должно выделить наиболее реальные формы равновесия оболочки в условиях их неоднозначности. Таким образом, в первую очередь следует изучить вопрос о числе форм равновесия системы при данных нагрузках. В связи с этим в § 29—31 проанализированы условия единственности решения нелинейных краевых задач теории пологих оболочек. При этом приходится различать глобальную единственность (во всем функциональном пространстве) и локальную единственность (в некоторой малой окрестности нуля функционального пространства). В связи с глобальной единственностью введен класс жестких оболочек. Показано, что жесткость оболочек определяется некоторой новой инвариантной упруго-геометрической характеристикой. В § 31 гл. VIII установлены классы корректности, в которых обеспечено малое изменение картины напряженно-деформированного состояния оболочки. Важным моментом в проблеме устойчивости тонкостенных конструкций является вопрос о нижнем критическом числе. Его приближенное определение является, можно сказать, неизменным элементом всякого исследования устойчивости. В связи с этим в § 33 дается теорема о существовании нижнего критического числа для широкого класса задач. Вся же гл. IX в целом посвящена выводу соотношений между верхним и нижним критическими числами, точками спектра соответствующей линеаризованной задачи и эйлеровой характеристикой — первым собственным числом этой задачи.

Содержание гл. X в соответствии с нашим пониманием проблемы устойчивости посвящено первой части этой задачи — оценке числа форм равновесия оболочки при той или иной нагрузке. В § 38 сделана попытка проанализировать вторую ее часть — выяснить степень реальности той или иной формы равновесия, если их несколько. Для этого работа оболочки описывается с учетом статистических факторов, причем оказывается возможным приписать той или иной форме равновесия вероятность пребывания в этой форме. В частном случае в качестве меры вероятности выступает уровень потенциальной энергии оболочки. Этим, в сущности, завершается намеченный план рассмотрения проблемы устойчивости пологих оболочек. Автор надеется, что книга окажется полезной исследователям и инженерам, работающим с тонкостенными конструкциями, а также математикам, интересующимся нелинейными проблемами механики сплошной среды.

Л. П. Лебедев тщательнейшим образом прочитал и отредактировал рукопись, сделав при этом много ценных предложений по ее усовершенствованию. Н. Ф. Морозов высказал ряд замечаний при рецензировании монографии, которые мною также учтены. Им моя искренняя признательность.

И. И. Ворович