МИНИСТЕРСТВО КУЛЬТУРЫ СССР

РОСТОВСКИЙ НА ДОНУ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени В. М. МОЛОТОВА

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

Том XVIII, вып. 3 /18

★

ТРУДЫ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени А. М. ГОРЬКОГО

ХАРЬКОВ 1953

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
РОСТОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМ. В. М. МОЛОТОВА

Том XVIII, вып. 3 1953

ОБ ОЦЕНКАХ ДЛЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ 2-го ПОРЯДКА, СОДЕРЖАЩИХ ПАРАМЕТР

И. И. Ворович

§ 1. Весьма большое число механических задач приводит к необходимости решать и исследовать дифференциальные уравнения вида:

$$y'' + p^2 y = 0, \tag{1}$$

где p — некоторая функция независимого переменного x.
Для приближенного интегрирования подобных уравнений часто могут быть применены асимптотические разложения решений по некоторому параметру, содержащемуся в уравнении [1, 2, 3, 4].

Пусть $p^2 = \varkappa^2 \left\{ p_0^2 + \frac{p_1}{\varkappa} + \ldots \frac{p_\kappa}{\varkappa^\kappa} \right\}$, где $p_0, p_1, \ldots, p_\kappa$ — дифференцируемые требуемое число раз функции независимого переменного x а $\varkappa$ — некоторый параметр, который мы будем считать достаточно большим. Кроме того, предположим, что $p_0(x) \neq 0$ на том отрезке изменения независимого переменного, где рассматривается уравнение (1).

В большинстве работ, посвященных асимптотическим разложениям, основное внимание уделяется доказательству асимптотического характера разложений.

На практике же наиболее интересным является вопрос о точности приближения решений уравнения (1) с помощью асимптотических разложений. Этот вопрос затронут лишь в [5], где дана оценка погрешности при использовании первых членов асимптотического ряда.

В данной работе будет дан другой метод построения оценки погрешности, более эффективный и справедливый при удержании произвольного числа членов асимптотического ряда.

Прежде чем перейти к построению оценки, установим несколько простых фактов, касающихся свойств решений уравнения (1). Именно, легко видеть, что уравнение (1) вполне эквивалентно системе

$$\dot{y}_1 = -\varkappa p y_2,$$
$$\dot{v}_2 = \varkappa p y_1 - \frac{\dot{p}}{p} y_2, \tag{2}$$

причем $p > 0$. Эквивалентность здесь понимается в том смысле, что если только

$$y_1(0) = y(0);\ y_2(0) = -\frac{1}{\varkappa p(0)} y'(0), \text{ то } v_1(x) = y(x).$$

Рассмотрим далее квадратичную форму $v = y_1^2 + y_2^2$.

В силу уравнений (2)

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{2\dot{p}}{p} y_2^2. \tag{3}$$