Том 358, Номер 5

Февраль 1998

ISSN 0869-5652

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

# ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК

Главный редактор
В.А. Кабанов

МАИК "НАУКА" "НАУКА"

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1998, том 358, № 5, с. 624–626

## МЕХАНИКА

УДК 539.3:534.1

# К ПРОБЛЕМЕ НИЗКОЧАСТОТНЫХ РЕЗОНАНСОВ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УПРУГОГО ТЕЛА С ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДОЙ

© 1998 г. Академик И. И. Ворович, Т. И. Белянкова, В. В. Калинчук

Поступило 26.09.97 г.

Существование неограниченных резонансов при взаимодействии массивного тела с полуограниченной средой установлено в [1]. При определенных условиях они могут возникать при контакте упругих тел конечных размеров с упругим основанием. Этот факт отмечен в [2] при исследовании задачи об изгибных колебаниях упругой балки на слое, когда контактные напряжения играют роль поверхностных сил в уравнении движения. Ниже исследуется другой тип краевой задачи, позволяющий описать резонансное взаимодействие упругого тела с упругим основанием, при котором реакция среды входит в граничные условия. В рамках такой модели механическая природа возникновения низкочастотных неограниченных резонансов становится особенно прозрачной, что позволяет четко сформулировать условия их возникновения и предложить аналитические соотношения для определения количества резонансных частот по заданным параметрам задачи. В качестве основания рассматривается полуограниченная среда (далее среда), имеющая критическую частоту распространения волн (слой, пакет слоев и т.д.).

1. Рассмотрим краевую задачу (используются безразмерные переменные, временной множитель опущен):

$$w_{xx} = -\sigma^2 w; \qquad (1)$$

$$x = l: \ -m_1\kappa^2 w = F - Ew_x; \qquad (2)$$

$$x = 0: \ -m_2\kappa^2 w = Ew_x - Pw, \qquad P = \iint_\Omega q(x_1, x_2)dx_1dx_2. \qquad (3)$$

Здесь $F$ – амплитуда внешней нагрузки, $\sigma = \sigma_0\kappa$, $\kappa$ – частота колебаний [3], $\sigma_0 = \sqrt{\rho_0 E^{-1}}$, $E$, $\rho_0$ – модуль Юнга и плотность материала стержня, $m_n$, $n = 1, 2$, – масса тела $M_n$, $q(x_1, x_2)$ – напряжения в области контакта, удовлетворяющие интегральному уравнению

$$kq = \iint_\Omega k(x_1-\xi, x_2-\eta)q(\xi,\eta)d\xi d\eta = 1, \quad (x_1, x_2)\in\Omega,$$

$$k(x_1, x_2) = \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} K(\alpha,\beta)e^{-i(\alpha x_1+\beta x_2)}d\alpha d\beta.$$

Краевая задача (1)–(3) описывает продольные колебания системы, включающей упругий стержень, который связывает массивное тело $M_1$ с жестким, занимающим на поверхности среды область $\Omega$ штампом $M_2$. Вид функций $K(\alpha, \beta)$ и правило выбора контуров $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ для различных контактных задач приведены в [3, 4]. $P(\kappa)$ – реакция среды, которая является вещественной [3] в диапазоне $[0, \kappa^*]$, где $\kappa^*$ – первая критическая частота колебаний среды, вне этого диапазона – комплекснозначной функцией. Ниже краевую задачу (1)–(3) будем называть задачей I.

Резонансными частотами системы, взаимодействующей с упругим основанием, являются собственные значения $\kappa_n^0$ задачи I, удовлетворяющие уравнению:

$$\Delta_0(\kappa) = \zeta_1 - \zeta_2, \qquad (4)$$

$$\zeta_1(\kappa) = P(\kappa) - m_2\kappa^2, \ \zeta_2(\kappa) = E\sigma\Delta_2\Delta_1^{-1},$$
$$\Delta_1 = 1 - \zeta_0\zeta_3^{-1}, \ \zeta_0(\kappa) = \operatorname{tg}\sigma l, \qquad (5)$$
$$\zeta_3(\kappa) = m_1^{-1}\sigma^{-1}, \ \Delta_2 = \zeta_3^{-1} + \zeta_0.$$

Неограниченный резонанс системе, контактирующей с упругим основанием, доставляют вещественные $\kappa_n^0$.

Лемма 1. *Вещественные* $\kappa_n^0$ *при* $P(\kappa) \neq 0$ *удовлетворяют неравенству* $\kappa_n^0 < \kappa^*$.

*Научно-исследовательский институт механики и прикладной математики Ростовского государственного университета, Ростов-на-Дону*