шир

ISSN 0321–3005

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
СЕВЕРО - КАВКАЗСКИЙ РЕГИОН

Математическое моделирование

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

2001 спецвыпуск

УДК 539.3

РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ МАССИВНЫХ ТЕЛ С ПОЛУОГРАНИЧЕННЫМИ СРЕДАМИ

© 2001 г. И.И. Ворович, Е.И. Ворович, О.Д. Пряхина, А.В. Смирнова, О.М. Тукодова

This article is devoted to the investigations of the resonance properties of the "massive body – elastic semi-bounded medium" systems under the harmonic action in the low frequency range.

В настоящей статье излагаются некоторые результаты исследований резонансных свойств систем: массивное тело – упругая полуограниченная среда, подвергающихся гармоническому воздействию в области низких частот [1].

Рассматривается твердое тело, жестко сцепленное с полуограниченной анизотропной средой. Тело имеет плоское основание S, и начало системы координат помещено в центре масс тела. Под воздействием силы $\mathbf{P} = \{P_k\}e^{-i\omega t}$ и момента $\mathbf{M} = \{M_k\}e^{-i\omega t}$ (ω – частота колебаний; t – время) центр масс совершает линейные колебания с амплитудой $\mathbf{u} = \{u_k\}$, а тело – малые угловые колебания с амплитудой $\varphi = \{\varphi_k\}$ ($k = 1, 2, 3$).

В этом случае точки подошвы тела S будут совершать колебания с амплитудой $\mathbf{u}^0 = \{u_k^0\}$

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u} + \varphi \times \mathbf{r}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{r} = \{x, y, -s\}$ – радиус-вектор точек плоского основания S; s – расстояние от положения центра масс тела до поверхности среды.

Движение упругой среды в случае гармонических колебаний описывается дифференциальными уравнениями [2]

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(c_{ijkl}\varepsilon^{kl}) + \rho\omega^2 w_i = 0,$$
$$2\varepsilon^{kl} = \frac{\partial w_k}{\partial x_l} + \frac{\partial w_l}{\partial x_k}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{w}\{w_1, w_2, w_3\}$ – вектор амплитуды перемещений точек среды; $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $c_{ijkl}(z)$ и $\rho(z)$ – упругие модули и плотность среды, которые зависят от поперечной координаты z.

К уравнениям (2) следует добавить условия на границе $z = 0$

$$\mathbf{w}(x, y, 0) = \mathbf{u}^0(x, y), \quad (x, y) \in S,$$

$$\mathbf{q}(x, y, 0) = c_{3jkl}\varepsilon^{kl} = 0, \quad (x, y) \notin S.$$

Если упругая среда представляет собой слой или пакет слоев толщины H, жестко сцепленный с недеформируемым основанием, то

$$\mathbf{w}(x, y, -H) = 0.$$

Для слоистой среды необходимо добавить условия стыковки: равенство напряжений и перемещений на границе раздела слоев

$$z = -2\sum_{i=1}^{m} h_i \qquad (m = 1, 2, \ldots, N-1),$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}^{m+1}, \qquad \sigma_{j3}^{m} = \sigma_{j3}^{m+1}, \qquad j = 1, 2, 3,$$

($2h_i$ – толщина i-го слоя). Уравнения (2) с учетом граничных условий методом интегральных преобразований [3] сводятся к системе трех интегральных уравнений 1 рода относительно вектора неизвестных контактных напряжений $\mathbf{q}\{q_1, q_2, q_3\}$

$$K\mathbf{q} = \iint_S \mathbf{k}(x - \xi, y - \zeta)\mathbf{q}(\xi, \zeta)\, d\xi d\zeta = \mathbf{u}^0(x, y),$$
$$\mathbf{k}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\sigma_1}\int_{\sigma_2} \mathbf{K}(\alpha, \beta)e^{-i(\alpha x + \beta y)}\, d\alpha d\beta, \qquad (3)$$
$$(x, y) \in S.$$

Матрица Грина $\mathbf{K}(\alpha, \beta)$ определяется типом среды, а контуры σ_1, σ_2 выбираются в соответствии с принципом предельного поглощения [2].

Для составления уравнений малых колебаний тела сформулируем 6 задач: определить напряженно-деформированное состояние среды в предположениях (1) при

1. $\mathbf{u}\{1,0,0\}, \varphi\{0,0,0\}$; 4. $\mathbf{u}\{0,0,0\}, \varphi\{1,0,0\}$;
2. $\mathbf{u}\{0,1,0\}, \varphi\{0,0,0\}$; 5. $\mathbf{u}\{0,0,0\}, \varphi\{0,1,0\}$;
3. $\mathbf{u}\{0,0,1\}, \varphi\{0,0,0\}$; 6. $\mathbf{u}\{0,0,0\}, \varphi\{0,0,1\}$.

Обозначим $\mathbf{q}\{q_1^k, q_2^k, q_3^k\}$, $k = \overline{1,6}$ – решения системы уравнений (3) для вышеперечисленных задач. Соответствующие усилия и моменты, возникающие в области контакта тела и среды, определяются по